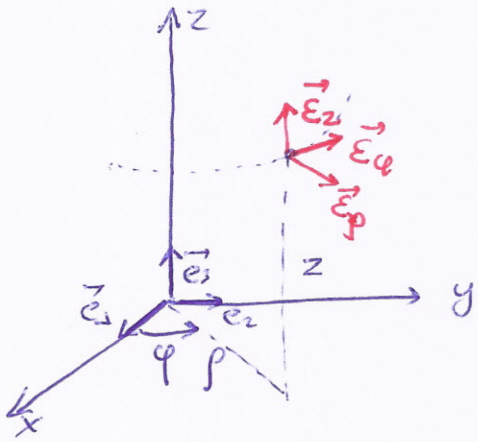
2) Κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, φ, z) $\rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi$



$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\varphi &= \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z &= z \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = (\rho\cos\varphi)\vec{e}_1 + (\rho\sin\varphi)\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \quad (3)$$

•) Φυσική βάση:

$$\left.\begin{aligned} \vec{\varepsilon}_\rho &= \frac{\partial x}{\partial \rho}\vec{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial \rho}\vec{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial \rho}\vec{e}_3 = (\cos\varphi)\vec{e}_1 + (\sin\varphi)\vec{e}_2 \\ \vec{\varepsilon}_\varphi &= \frac{\partial x}{\partial \varphi}\vec{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\vec{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\vec{e}_3 = (-\rho\sin\varphi)\vec{e}_1 + (\rho\cos\varphi)\vec{e}_2 \\ \vec{\varepsilon}_z &= \frac{\partial x}{\partial z}\vec{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial z}\vec{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial z}\vec{e}_3 = \vec{e}_3 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Οπότε

$$|\vec{\varepsilon}_\rho| = 1, \quad |\vec{\varepsilon}_\varphi| = \rho, \quad |\vec{\varepsilon}_z| = 1 \quad (5)$$

•) Ορθοκανονική βάση:

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \vec{\varepsilon}_\rho = (\cos\varphi)\vec{e}_1 + (\sin\varphi)\vec{e}_2 \\ \vec{e}_\varphi &= \frac{1}{\rho}\vec{\varepsilon}_\varphi = (-\sin\varphi)\vec{e}_1 + (\cos\varphi)\vec{e}_2 \\ \vec{e}_z &= \vec{\varepsilon}_z = \vec{e}_3 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

•) Αντίστροφη φυσική βάση.

$$\vec{\varepsilon}_\rho \cdot \vec{\varepsilon}^\rho = 1 \Longrightarrow |\vec{\varepsilon}_\rho||\vec{\varepsilon}^\rho| = 1 \Longrightarrow \vec{\varepsilon}^\rho = \vec{e}_\rho = \vec{\varepsilon}_\rho$$

$$\vec{\varepsilon}_\varphi \cdot \vec{\varepsilon}^\varphi = 1 \Longrightarrow |\vec{\varepsilon}_\varphi||\vec{\varepsilon}^\varphi| = 1 \Rightarrow |\vec{\varepsilon}^\varphi| = \frac{1}{\rho} \Longrightarrow \vec{\varepsilon}^\varphi = \frac{1}{\rho}\vec{e}_\varphi = \frac{1}{\rho^2}\vec{\varepsilon}_\varphi$$

$$\vec{\varepsilon}_z \cdot \vec{\varepsilon}^z = 1 \Longrightarrow |\vec{\varepsilon}^z| = 1 \Longrightarrow \vec{\varepsilon}^z = \vec{e}_z = \vec{\varepsilon}_z$$

Άσκηση A5/σελ 43

$\vec{a}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \Rightarrow \vec{e}_1{}' = \dfrac{2\vec{e}_1 + \vec{e}_2}{\sqrt{5}}$

$\vec{a}_2 = 2\vec{e}_2 - \vec{e}_1 \Rightarrow \vec{e}_2{}' = \dfrac{-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2}{\sqrt{5}}$

$\vec{a}_3 = \vec{e}_3 \Rightarrow \vec{e}_3{}' = e_3$

Εύκολα φαίνεται οτι $\vec{e}_1{}' \cdot \vec{e}_2{}' = 0 \Rightarrow \vec{e}_1{}' \perp \vec{e}_2{}'$

Σύμφωνα με τη σχέση §10 (3) έχουμε $\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

οπότε

$$T' = \Lambda T \Lambda^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{5}{\sqrt{5}} & -\frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{7}{5} & -\frac{11}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 4 \end{bmatrix}$$

Άσκηση Α9/σελ 44

1α

$$\vec{v} = \underbrace{\dot{x}}_{A_1}\vec{e}_1 + \underbrace{\dot{y}}_{A_2}\vec{e}_2 + \underbrace{\dot{z}}_{A_3}\vec{e}_3$$

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\vartheta$$

$$u^1 = x \qquad u^{1'} = r$$
$$u^2 = y \qquad u^{2'} = \vartheta$$
$$u^3 = z \qquad u^{3'} = \varphi$$

$$g_{11} = 1 \qquad g_{22} = r^2 \qquad g_{33} = r^2\sin^2\vartheta \qquad g_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

$$g^{11} = 1 \qquad g^{22} = \frac{1}{r^2} \qquad g^{33} = \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta} \qquad g^{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

$$\underline{A_{i'} = \frac{\partial u^j}{\partial u^{i'}} A_j}$$

• $A_r = \frac{\partial x}{\partial r}\dot{x} + \frac{\partial y}{\partial r}\dot{y} + \frac{\partial z}{\partial r}\dot{z} = \dot{x}\sin\vartheta\cos\varphi + \dot{y}\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{z}\cos\vartheta =$

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = \dot{r}\sin\vartheta\cos\varphi + \dot{\vartheta}r\cos\vartheta\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\varphi \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\vartheta\sin\varphi + r\dot{\vartheta}\cos\vartheta\sin\varphi + r\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\varphi \\ \dot{z} = \dot{r}\cos\vartheta - r\dot{\vartheta}\sin\vartheta \end{array}\right.$$

$= (\dot{r}\sin\vartheta\cos\varphi + \dot{\vartheta}r\cos\vartheta\cos\varphi - r\dot{\varphi}\cancel{\sin\vartheta\sin\varphi})\cdot\sin\vartheta\cos\varphi +$

$+(\dot{r}\sin\vartheta\sin\varphi + r\dot{\vartheta}\cos\vartheta\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cancel{\sin\vartheta}\cos\varphi)\sin\vartheta\sin\varphi +$

$+(\dot{r}\cos\vartheta - r\dot{\vartheta}\sin\vartheta)\cos\vartheta =$

$\dot{r}(\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + \sin^2\vartheta\sin^2\varphi + \cos^2\vartheta) + r\dot{\vartheta}(\sin\vartheta\cos\vartheta\cos^2\varphi + \sin\vartheta\cos\vartheta\sin^2\varphi -$

$-\sin\vartheta\cos\vartheta) =$

$= \dot{r}[\sin^2\vartheta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\vartheta] + r\dot{\vartheta}[\sin\vartheta\cos\vartheta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - \sin\vartheta\cos\vartheta] \Rightarrow$

$\boxed{A_r = \dot{r}}$

• $A_\vartheta = \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\dot{x} + \frac{\partial y}{\partial \vartheta}\dot{y} + \frac{\partial z}{\partial \vartheta}\dot{z} =$

$= (\dot{r}\sin\vartheta\cos\varphi + \dot{\vartheta}r\cos\vartheta\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\varphi)r\cos\vartheta\cos\varphi +$

$+(\dot{r}\sin\vartheta\sin\varphi + r\dot{\vartheta}\cos\vartheta\sin\varphi + r\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\varphi)r\cos\vartheta\sin\varphi +$

$+(\dot{r}\cos\vartheta - r\dot{\vartheta}\sin\vartheta)(-r\sin\vartheta) =$

$r\dot{r}[\sin\vartheta\cos\vartheta\cos^2\varphi + \sin\vartheta\cos\vartheta\sin^2\varphi - \sin\vartheta\cos\vartheta] +$

$r^2\dot{\vartheta}[\cos^2\vartheta\cos^2\varphi + \cos^2\vartheta\sin^2\varphi + \sin^2\vartheta] +$

$r^2\dot{\varphi}[-\cos\vartheta\sin\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + \sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi\sin\varphi] \Rightarrow \boxed{A_\vartheta = r^2\dot{\vartheta}}$

$$A_\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\dot{x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\dot{y} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\dot{z} =$$

$$= (\dot{r}\sin\vartheta\cos\varphi + r\cos\vartheta\cos\varphi\,\dot{\vartheta} - r\sin\vartheta\sin\varphi\,\dot{\varphi})(-r\sin\vartheta\sin\varphi) +$$

$$+ (\dot{r}\sin\vartheta\sin\varphi + r\cos\vartheta\sin\varphi\,\dot{\vartheta} + r\sin\vartheta\cos\varphi\,\dot{\varphi})(r\sin\vartheta\cos\varphi) \Rightarrow$$

$$\boxed{A_\varphi = r^2\dot{\varphi}\sin^2\vartheta}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\vec{\varepsilon}^{\,r} + r^2\dot{\vartheta}\,\vec{\varepsilon}^{\,\vartheta} + r^2\dot{\varphi}\sin^2\vartheta\,\vec{\varepsilon}^{\,\varphi}}$$

$$A^m = g^{mn}A_n$$

$$A^r = g^{11}A_r + g^{12}A_\vartheta + g^{13}A_\varphi = 1\cdot\dot{r} \Rightarrow \boxed{A^r = \dot{r}}$$

$$A^\vartheta = g^{21}A_r + g^{22}A_\vartheta + g^{23}A_\varphi = \frac{1}{r^2}r^2\dot{\vartheta} \Rightarrow \boxed{A^\vartheta = \dot{\vartheta}}$$

$$A^\varphi = g^{31}A_r + g^{32}A_\vartheta + g^{33}A_\varphi = \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}r^2\dot{\varphi}\sin^2\vartheta \Rightarrow \boxed{A^\varphi = \dot{\varphi}}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\vec{\varepsilon}_r + \dot{\vartheta}\,\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\,\vec{\varepsilon}_\varphi}$$

Άσκηση 3

Η κίνηση συνεχούς μέσου περιγράφεται από τις εξισώσεις:

α) $x = \xi^1$

$$y = \frac{e^t}{2}(\xi^2+\xi^3) + \frac{e^{-t}}{2}(\xi^2-\xi^3) \qquad (A)$$

$$z = \frac{e^t}{2}(\xi^2+\xi^3) - \frac{e^{-t}}{2}(\xi^2-\xi^3)$$

β) $x = e^t\xi^1 + (e^t-1)\xi^3$

$$y = (e^t - e^{-t})\xi^3 + \xi^2 \qquad (B)$$

$$z = \xi^3$$

Να βρεθούν οι συνιστώσες της ταχύτητας συναρτήσει των μεταβλητών του Lagrange και του Euler.

Λύση

α) Οι συνιστώσες της ταχύτητας κατά Lagrange είναι

$$v_x = \left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{\xi^i} = 0$$

$$v_y = \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{\xi^i} = \frac{e^t}{2}(\xi^2+\xi^3) - \frac{e^{-t}}{2}(\xi^2-\xi^3) \qquad (1)$$

$$v_z = \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{\xi^i} = \frac{e^t}{2}(\xi^2+\xi^3) + \frac{e^{-t}}{2}(\xi^2-\xi^3)$$

και κατά Euler:

$$v_x = 0$$

$$v_y = z$$

$$v_z = y$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις (A) και (1)

b) Κατά Lagrange

$$v_x = \left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{\xi^i} = e^t \xi^1 + e^t \xi^3 = e^t(\xi^1 + \xi^3)$$

$$v_y = \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{\xi^i} = (e^t + e^{-t})\,\xi^3$$

$$v_z = \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{\xi^i} = 0 \qquad (2)$$

<u>Κατά Euler</u>

Από τα (2) και (B) έχουμε:

$$v_x = e^t \xi^1 + e^t \xi^3 = e^t \xi^1 + (e^t - 1)\xi^3 + \xi^3 = x + z$$

$$v_y = (e^t + e^{-t})\,z$$

$$v_z = 0$$

Άσκηση Α1/σελ 100

(α) Έχουμε:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\kappa x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \kappa x_1 \qquad (A)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \lambda(x_1^2 + x_2^2)$$

Από τις πρώτες δύο παίρνουμε:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\kappa x_2 \Rightarrow \frac{d^2x_1}{dt^2} = -\kappa \frac{dx_2}{dt} = -\kappa^2 x_1 \Rightarrow \frac{d^2x_1}{dt^2} + \kappa^2 x_1 = 0 \Longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = a\cos\kappa t + b\sin\kappa t \\ x_2 = +a\sin\kappa t - b\cos\kappa t \end{array}}$$ οπότε $\dot{x}_1 = -\kappa x_2 \Rightarrow -a\kappa\sin\kappa t + b\kappa\cos\kappa t = -\kappa x_2 \Rightarrow$

Από τις αρχικές συνθήκες για $t=0$ $x_1 = \xi^1$, $x_2 = \xi^2$ έχουμε.

$$\xi^1 = a$$

$$\xi^2 = -b.$$

Άρα

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = \xi^1\cos\kappa t - \xi^2\sin\kappa t \\ x_2 = \xi^1\sin\kappa t + \xi^2\cos\kappa t \end{array}} \quad (1)$$

Από τις (1) φαίνεται ότι $x_1^2 + x_2^2 = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 =$ σταθερό (2)

Από την τρίτη εξίσωση της (A) έχουμε.

$$\frac{dx_3}{dt} = \lambda[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2] \longrightarrow x_3 = \lambda[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2] + c$$

και από την αρχική συνθήκη $x_3 = \xi^3$ για $t=0$ έχουμε

$$\boxed{x_3 = \lambda[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2] + \xi^3} \quad (3)$$

(β) Από (A) έχουμε $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{\kappa^2 x_2^2 + \kappa^2 x_1^2 + \lambda^2(x_1^2 + x_2^2)} =$

$$= \sqrt{(\kappa^2+\lambda^2)\cdot(x_1^2+x_2^2)} \overset{(2)}{\Longrightarrow} |\vec{v}| = \sqrt{(\kappa^2+\lambda^2)[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2]} = \text{σταθερό}$$

Άσκηση Α23/σελ 105

$$\frac{dx_1}{dt}=x_1 \Rightarrow \frac{dx_1}{x_1}=dt \Rightarrow \ln x_1 = t + c \Rightarrow x_1 = c_1 e^t \begin{pmatrix} \text{Για } t=0 \\ x_1=\xi^1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x_1 = \xi^1 e^t} \quad (1a)$$

$$\frac{dx_2}{dt}=-x_2 \Rightarrow \frac{dx_2}{x_2}=-dt \Rightarrow x_2 = c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} t=0 \\ x_2=\xi^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x_2 = \xi^2 e^{-t}} \quad (1b)$$

$$\frac{dx_3}{dt}=\frac{x_3}{1+t} \Rightarrow \frac{dx_3}{x_3}=\frac{dt}{1+t} \Rightarrow \ln x_3 = \ln(1+t)+d \Rightarrow x_3 = c_3(1+t) \begin{pmatrix} t=0 \\ x_3=\xi^3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\boxed{x_3 = \xi^3 (1+t)} \quad (1c)$$

Από (1) για $\xi^1=1$, $\xi^2=2$, $\xi^3=2$ έχουμε:

$$\boxed{x_1 = e^t, \quad x_2 = 2e^{-t}, \quad x_3 = 2(1+t)} \quad (2)$$

Από το αρχικό πεδίο ταχυτήτων έχουμε:

$$u_1 = e^t, \quad u_2 = -2e^{-t}, \quad u_3 = 2,$$

άρα για $t=\ln 2$ $(e^{\ln 2}=2)$ έχουμε:

$$u_1 = 2, \quad u_2 = -1, \quad u_3 = 2$$

οπότε

$$u = \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2} = \sqrt{4+1+4} \Rightarrow u = 3$$

Άσκηση Α24/σελ. 105

Έχουμε μόνιμη ροή

Τροχιές $\frac{dx_1}{u_1} = \frac{dx_2}{u_2} = \frac{dx_3}{u_3} \Rightarrow \boxed{\frac{dx_1}{-x_2} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{dx_3}{4x_2}}$ (A)

•) $\frac{dx_1}{-x_2} = \frac{dx_2}{x_1} \Rightarrow x_1 dx_1 = -x_2 dx_2 \Rightarrow x_1^2 = -x_2^2 + c \xrightarrow[\text{συνθ.}]{\text{αρχ.}}$

$$\boxed{x_1^2 + x_2^2 = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2} \quad (1)$$

•) $\frac{dx_1}{-x_2} = \frac{dx_3}{4x_2} \Rightarrow -4\,dx_1 = dx_3 \Rightarrow -4x_1 = x_3 + c \xrightarrow[\text{συνθ.}]{\text{αρχ.}}$

$$\boxed{4x_1 + x_3 = 4\xi^1 + \xi^3} \quad (2)$$

Για $\xi^1 = 1$, $\xi^2 = -1$, $\xi^3 = 2$ οι (1) και (2) δίνουν

$$x_1^2 + x_2^2 = 2, \qquad 4x_1 + x_3 = 6$$

→ Η παραμόρφωση συνεχούς μέσου δίνεται από τις εξισώσεις:

$x_1' = x_1 + b(x_2^2 + x_1)$

$x_2' = x_2 + b(x_3^2 + x_2)$ όπου b μικρό.

$x_3' = x_3 + b(x_1^2 + x_3)$

α) Να βρεθεί ο τανυστής παραμόρφωσης

β) Να βρεθούν τρεις διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους, με αρχή το σημείο $(0,1,0)$ που να διατηρούν την καθετότητα τους και μετά την παραμόρφωση.

<u>Λύση</u>

α) έχουμε $w_1 = b(x_2^2 + x_1)$

$w_2 = b(x_3^2 + x_2)$

$w_3 = b(x_1^2 + x_3)$

και

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w_1}{\partial x_1} = b, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x_2} = 2bx_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x_3} = 0 \\
&\frac{\partial w_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x_2} = b, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x_3} = 2bx_3 \\
&\frac{\partial w_3}{\partial x_1} = 2bx_1, \quad \frac{\partial w_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial w_3}{\partial x_3} = b.
\end{aligned}\right\}$$

Όλα είναι πολ/σια του b, άρα έχω <u>απειροστή παραμόρφωση</u>

Οπότε ο τανυστής παραμόρφωσης είναι:

$$(\epsilon_{ij}) = b\begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_1 \\ x_2 & 1 & x_3 \\ x_1 & x_3 & 1 \end{pmatrix}$$

β) Για το συγκεκριμένο σημείο $(0,1,0)$ ο τανυστής γίνεται:

$$b\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ και οι ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα του είναι

$\lambda_1 = 1 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 2 \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = 0 \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Οπότε οι ζητούμενες διευθύνσεις είναι αυτές που καθορίζονται από τα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$

⇒ Η παραμόρφωση συνεχούς μέσου δίνεται από τις εξισώσεις:

$x_1' = x_1 + b(x_3^4 - x_2^4 + 2x_1)$

$x_2' = x_2 + b(x_1^4 - x_3^4 + 2x_2)$

$x_3' = x_3 + b(x_2^4 - x_1^4 + 2x_3)$

α) Να βρεθεί ο τανυστής παραμόρφωσης στο σημείο $(1,1,0)$ για $b \ll 1$

β) Να βρεθεί ο συντελεστής σχετικής επιμήκυνσης στο σημείο $(1,1,0)$, κατά τη διεύθυνση του Ox_1 για $b \ll 1$

γ) Σε ποιά σημεία δύο διευθύνσεις αρχικά παράλληλες προς τους άξονες Ox_1, Ox_2 παραμένουν κάθετες μεταξύ τους;

<u>Λύση</u>

α) $w_1 = b(x_3^4 - x_2^4 + 2x_1)$

$w_2 = b(x_1^4 - x_3^4 + 2x_2)$

$w_3 = b(x_2^4 - x_1^4 + 2x_3)$

οπότε:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w_1}{\partial x_1} = 2b, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x_2} = -4x_2^3 b, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x_3} = 4bx_3^3 \\
&\frac{\partial w_2}{\partial x_2} = 2b, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x_1} = 4bx_1^3, \quad \frac{\partial w_2}{\partial x_3} = -4x_3^3 b \\
&\frac{\partial w_3}{\partial x_1} = -4x_1^3 b, \quad \frac{\partial w_3}{\partial x_2} = 4x_2^3 b, \quad \frac{\partial w_3}{\partial x_3} = 2b
\end{aligned}\right\}$$

Όλα είναι πολ/σια του b, άρα για $b \ll 1$ έχουμε <u>απειροστή παραμόρφωση</u>

Ο τανυστής παραμόρφωσης είναι:

$$(\varepsilon_{ij}) = 2b \begin{pmatrix} 1 & x_1^3 - x_2^3 & x_3^3 - x_1^3 \\ x_1^3 - x_2^3 & 1 & x_1^3 - x_3^3 \\ x_3^3 - x_1^3 & x_2^3 - x_3^3 & 1 \end{pmatrix}$$

Για το σημείο $(1,1,0)$ έχω:

$$(\varepsilon_{ij})_{(1,1,0)} = 2b \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

β) $e_1 = \varepsilon_{11} = 2b$

γ) Για τη μεταβολή της γωνίας των αξόνων έχουμε $\hat{x}_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$.
Εδώ ψάχνουμε τα σημεία με $\hat{x}_{12} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{12} = 0 \Rightarrow x_1^3 - x_2^3 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{x_1 = x_2}$. Τα σημεία αυτά βρίσκονται στο επίπεδο $x_1 = x_2$ το οποίο περιέχει τον άξονα Ox_3 και σχηματίζει γωνία $45°$ με τους άξονες Ox_1, Ox_2

Άσκηση Α9 / σελ. 102

Έχουμε
$$w_1 = -\epsilon x_2$$
$$w_2 = \epsilon x_1 \qquad (1)$$
$$w_3 = 0 \qquad \epsilon << 1 \Longrightarrow \text{απειροστή παραμόρφωση}$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right) = 0$ επομένως δεν έχουμε παραμόρφωση. Άρα το συνεχές μέσο μετακινείται χωρίς να παραμορφώνεται.

Τι κίνηση εκτελεί;

Για στροφή κατά γωνία φ έχουμε:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

αν $\varphi << 1 \Longrightarrow \cos\varphi \approx 1$, $\sin\varphi \approx \varphi$, άρα η (2) γίνεται

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \varphi \\ -\varphi & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Η (1) γράφεται

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Από (3) και (4) καταλαβαίνουμε ότι έχουμε απειροστή περιστροφή γύρω από τον άξονα x_3.

Άσκηση A_{21} / σελ 105

Για τον τανυστή παραμόρφωσης βρίσκουμε.

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 0$$

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \frac{1}{2} k \left(2x_2x_3 + x_3^2\right) \overset{(1,1,1)}{=\!=\!=} \frac{3}{2} k$$

$$\epsilon_{13} = \epsilon_{31} = \frac{1}{2} k \left(2x_1x_2 + x_2^2\right) \overset{(1,1,1)}{=\!=\!=} \frac{3}{2} k \qquad (1)$$

$$\epsilon_{23} = \epsilon_{32} = \frac{1}{2} k \left(2x_3x_1 + x_1^2\right) \overset{(1,1,1)}{=\!=\!=} \frac{3}{2} k$$

αφού
$$w_1 = k x_2^2 x_3$$
$$w_2 = k x_3^2 x_1 \qquad (2)$$
$$w_3 = k x_1^2 x_2$$

Η διεύθυνση που ζητείται καθορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1) \qquad (3)$$

Οπότε από τη σχέση (7) της §23 έχουμε

$$e_{\vec{n}} = n^T E n = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 \ 1 \ 1) \frac{3}{2} k \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3k$$

Άσκηση Α26/σελ 105

Έχουμε

$$\vec{v} = (x_2 + \alpha \cancel{x} x_1)\vec{e_1} + (x_1 + x_2)\vec{e_2} \qquad (1)$$

οπότε

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \operatorname{div}\vec{v} = \alpha + 1 \qquad (2)$$

Για να είναι η ροή ασυμπίεστη πρέπει

$$\vec{\nabla}\vec{v} = 0 \Rightarrow \alpha + 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{\alpha = -1} \qquad (3)$$

οπότε

$$\vec{v} = (x_2 - x_1)\vec{e_1} + (x_1 + x_2)\vec{e_2} \qquad (4)$$

Για το πεδίο στροβίλων έχουμε

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{v} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_2 - x_1 & x_1 + x_2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

Οπότε από την (11) της §29 έχουμε

$$K = \oint_C \vec{v}\cdot d\vec{r} = 2\int_\Sigma \vec{\omega}\cdot\vec{n}\,d\sigma = 0 \qquad (6)$$

Άσκηση

Δίνεται το πεδίο ταχυτήτων $v_1 = \alpha x_2^2$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$, $a \ll 1$.

α) Να βρεθεί η παραμόρφωση μικρού κύβου στην περιοχή του σημείου $(0, 1, 0)$ με ακμές παράλληλες στους άξονες x_1, x_2, x_3

β) Να βρεθούν 3 διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους, με αρχή το $(0,1,0)$ ώστε η καθετότητά τους να μην μεταβάλλεται από την παραμόρφωση

γ) Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής των μηκών, ανά μονάδα μήκους, πάνω σε αυτές τις τρεις διευθύνσεις;

Λύση

α) Ο τανυστής ρυθμού παραμόρφωσης είναι:

$$(e_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & ax_2 & 0 \\ ax_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και για το σημείο $(0,1,0)$ γίνεται:

$$(e_{ij})_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ρυθμός μεταβολής μηκών ακμών $= e_{ii} = 0$. Επειδή $e_{12} \neq 0$ η γωνία των αξόνων I^1 και I^2 μεταβάλλεται. Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ανά μονάδα όγκου είναι $\frac{dV/dt}{dV} = e_{11} + e_{22} + e_{33} = 0$. Άρα ο όγκος δεν αλλάζει. Άρα ο κύβος θα μετασχηματιστεί σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με τον ίδιο όγκο

β) Οι ζητούμενες διευθύνσεις είναι οι ιδιοδιευθύνσεις του $(e_{ij})_{(0,1,0)}$. Συγκεκριμένα οι ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα (ιδιοδιευθύνσεις) του $(e_{ij})_{(0,1,0)}$ είναι.

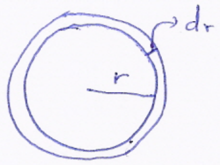
$$\lambda_1 = 0 \longrightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -\alpha \longrightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \alpha \longrightarrow u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

γ) Οι ζητούμενες ποσότητες είναι οι ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\alpha, \quad \lambda_3 = \alpha.$$

Άσκηση Α5/σελ 101

Ο όγκος του ρευστού που "μπαίνει" σε σφαίρα ακτίνα r είναι



$$dV = \underbrace{(4\pi r^2)}_{\substack{\text{Επιφάνεια} \\ \text{σφαίρας}}} \cdot dr \Longrightarrow$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 u_r = 4\pi r^2 \cdot \frac{Q}{4\pi r^2} = Q$$

Άσκηση Α6 / σελ 136

Μονοδιάστατη ροή $\vec{v} = v_1 \vec{e_1} + v_2 \vec{e_2} + v_3 \vec{e_3}$ με

$$v_1 = \frac{x_1}{1+t} \qquad v_2 = 0 \qquad v_3 = 0$$

α) $\rho = \rho(t)$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla}\vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot \frac{1}{1+t} = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dt}{1+t} \Rightarrow$$

$$\ln\rho = -\ln(1+t) + c \Rightarrow \rho = \frac{c_1}{1+t} \qquad \text{για } t=0 \ \rho = \rho_0 = \frac{c_1}{t} \text{ οπότε}$$

$$\boxed{\rho = \frac{\rho_0}{1+t}}$$

β) $\rho = \rho(x_1)$

$$\underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}}_{=0} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \rho\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1\frac{\partial\rho}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow$$

$$\rho\frac{1}{1+t} + \frac{\partial\rho}{\partial x_1}\frac{x_1}{1+t} = 0 \Rightarrow x_1\frac{\partial\rho}{\partial x_1} + \rho = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dx_1}{x_1} \Longrightarrow$$

$$\ln\rho = -\ln x_1 + c \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{c_1}{x_1}}$$

Ασκηση A_{12}/σελ 137

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix} \alpha x_3 & \alpha x_2 & \alpha x_1 \\ \alpha x_2 & \alpha x_1 & \alpha x_3 \\ \alpha x_1 & \alpha x_3 & \alpha x_2 \end{pmatrix}$$

Το τετράγωνο ΟΒΓΔ αντιστοιχεί στο διάνυσμα $\vec{n}=(0,0,1)$ άρα

$$\vec{p}=T\vec{n}=\begin{pmatrix} 0 & \alpha x_2 & \alpha x_1 \\ \alpha x_2 & \alpha x_1 & 0 \\ \alpha x_1 & 0 & \alpha x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{p}=(\alpha x_1, 0, \alpha x_2)=\alpha x_1 \vec{e_1}+\alpha x_2 \vec{e_3}$$

$$\vec{F}=\int_0^{\ell}\int_0^{\ell}\vec{p}\,dx_1 dx_2=\int_0^{\ell}\int_0^{\ell}(\alpha x_1 \vec{e_1}+\alpha x_2 \vec{e_3})\,dx_1 \cdot dx_2=$$

$$=\int_0^{\ell}\left[\alpha \frac{x_1^2}{2}\vec{e_1}+\alpha x_2 x_1 \vec{e_3}\right]_0^{\ell} dx_2=\int_0^{\ell}\left(\frac{\alpha \ell^2}{2}\vec{e_1}+\alpha \ell x_2 \vec{e_3}\right)dx_2=$$

$$\left(\frac{a\ell^2}{2}x_2\vec{e_1}+\alpha \ell \frac{x_2^2}{2}\vec{e_3}\right)_0^{\ell} \Longrightarrow \boxed{\vec{F}=\frac{a\ell^3}{2}(\vec{e_1}+\vec{e_3})}$$